

## **СОГЛАСОВАН**

решением Ученого совета  
АНО ВО «МБИ  
имени Анатолия Собчака»  
(протокол от «19» декабря 2024 г. № 6)

## **АКТУАЛИЗИРОВАН**

решением Ученого совета  
АНО ВО «МБИ  
имени Анатолия Собчака»  
(протокол от «25» декабря 2025 г. № 7)

## **УТВЕРЖДЕН**

приказом ректора  
АНО ВО «МБИ  
имени Анатолия Собчака»  
от «27» декабря 2024 г. № 56

## **УТВЕРЖДЕНА**

**актуализированная версия**  
приказом ректора  
АНО ВО «МБИ  
имени Анатолия Собчака»  
от «30» декабря 2025 г. № 59

### **ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

по дисциплине

### **Математический анализ**

специальность

***38.05.01 Экономическая безопасность***

специализация

***Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности***

уровень образования

***высшее образование - специалитет***

форма обучения

***очно-заочная***

год набора

***2025***

Санкт-Петербург  
2024

## СОДЕРЖАНИЕ

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.   | ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ И ЭТАПЫ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ .....             | 3  |
| 1.   | Рабочей программой дисциплины (модуля) предусмотрено формирование следующих компетенций:..... | 3  |
| 2.   | СТРУКТУРА ФОС ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....                                                             | 3  |
| 3.   | ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ .....                                                | 5  |
| 4.   | ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА.....                                                              | 6  |
| 5.   | ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....                                                          | 7  |
| 5.1. | ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ: .....                                                          | 7  |
| 5.2. | КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ.....                                   | 7  |
| 5.3. | ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ.....                                                                 | 31 |
| 6.   | МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ .....                               | 37 |
| 7.   | ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ.....        | 38 |
| 7.1. | ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ.....          | 40 |
| 7.2. | ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ.....   | 40 |

# 1. ПЕРЕЧЕНЬ КОМПЕТЕНЦИЙ И ЭТАПЫ ИХ ФОРМИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1. Фонд оценочных средств предназначен для оценки результатов обучения по учебной дисциплине.

Рабочей программой дисциплины (модуля) предусмотрено формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции выпускника                                                                                                                                                                                                                              | Код и наименование индикатора достижения компетенций                                                                                                                         | Планируемые результаты обучения по дисциплине                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ОПК-1. Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты. | ОПК-1.1. Формирует стандартные теоретические и экономические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты. | Знает. Математический аппарат (линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей, статистика). Способы формализации и постановки экономических задач (например, максимизация прибыли или минимизация издержек). Базовые принципы классификации экономико-математических моделей.<br>Умеет: Переводить реальные бизнес-процессы на язык математики. Строить экономико-математические модели и применять методы математического программирования. Использовать прикладное программное обеспечение для расчетов и оптимизации<br>Приобретает навыки: Навыки точной интерпретации результатов, полученных при математическом моделировании. Навык оценивать риски, обосновывать управленческие решения и делать экономические прогнозы на основе численных данных |

1.2. Входной уровень знаний, умений, опыта деятельности, требуемых для формирования компетенции

– Знает: этапы решения задачи из различных разделов математического анализа (теории пределов функций, дифференциального исчисления, интегрального исчисления функций одной и многих переменных).

– Умеет: определять порядок действий при решении задачи, исходя из её анализа.

– Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи

– Умеет: работать с теоретическим материалом по теме задачи; пользоваться математической символикой и терминологией при решении задач и доказательстве теорем математического анализа

## 2. СТРУКТУРА ФОС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Оценка проводится методом сопоставления параметров продемонстрированной обучающимся продукта деятельности с заданными эталонами и стандартами по критериям.

Таблица – 1.1. Объекты оценивания и наименование оценочных средств

| Номер и наименование разделов/тем | Формы текущего контроля успеваемости | Объекты оценивания | Вид занятия / Наименование | Форма проведения оценки Устная/ |
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------|----------------------------|---------------------------------|
|-----------------------------------|--------------------------------------|--------------------|----------------------------|---------------------------------|

|                                                                                                          | ти /<br>промежуто<br>чной<br>аттестации |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | оценочных<br>средств                                                                 | письменная            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Тема 1.<br>Множества и<br>функции                                                                        | Текущий<br>контроль                     | Понятие множества; операции объединения, пересечения и разности множеств; определение и способы задания функции; основные свойства функций: монотонность, четность, периодичность; понятия сложной и обратной функций, основные элементарные функции и их графики, преобразования графиков;                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | ДП – доклад<br>презентации<br>Т – тест                                               | устная/<br>письменная |
| Тема 2.<br>Предел и<br>непрерывнос<br>ть функции<br>одной<br>переменной                                  | Текущий<br>контроль                     | Понятие числовой последовательности и ее предела; понятия бесконечно малой и бесконечно большой последовательностей и связь между ними; арифметические свойства пределов последовательностей понятие предела функции; арифметические свойства пределов функций (и предел элементарной функции понятие числа «e» и работа натурального логарифма; замечательные пределы; теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях. Применение свойств эквивалентных бесконечно малых функций к вычислению пределов; таблица эквивалентных функций; точки разрыва функции и их классификация, теорема о непрерывности элементарных функций. | доклад<br>презентации<br>Т – тест<br>Коллоквиум,<br>задачи,<br>контрольная<br>работа | Устная<br>/письменная |
| Тема 3.<br>Дифференци<br>альное<br>исчисление<br>функции<br>одной<br>переменной                          | Текущий<br>контроль                     | определение производной, ее геометрический смысл, дифференцируемость функции на промежутке, таблица производных основных элементарных функций, теорема о дифференцировании суммы, произведения и частного функций, теорема о дифференцировании сложной функции, понятие дифференциала функции и теорема о связи дифференциала с приращением функции; понятие эластичности функции в точке;                                                                                                                                                                                                                                          | доклад<br>презентации<br>Т – тест<br>Коллоквиум,<br>задачи,<br>контрольная<br>работа | Письменная<br>Устная  |
| Тема 4.<br>Использован<br>ие<br>производных<br>для<br>исследования<br>функции и<br>построения<br>графика | Текущий<br>контроль                     | Достаточные условия монотонности функции необходимые и достаточные условия экстремума; теорема о необходимых и достаточных условиях выпуклости функции, теорема о наибольшем (наименьшем) значении выпуклой функции, понятие точки перегиба функции и достаточное условие ее существования понятие асимптоты графика функции, достаточные условия существования вертикальной и наклонной асимптот;                                                                                                                                                                                                                                  | доклад<br>презентации<br>Т – тест<br>Коллоквиум,<br>задачи,<br>контрольная<br>работа | Устная<br>письменная  |
| Тема 5.<br>Неопределен<br>ный интеграл                                                                   | Текущий<br>контроль                     | Определение первообразной, понятие неопределенного интеграла, его свойства, таблица неопределенных интегралов, теорема о замене переменной в неопределенном интеграле, теорема об интегрировании по частям, понятие простейших рациональных дробей и их интегрирование, метод интегрирования правильной рациональной дроби разложением ее на сумму простейших рациональных дробей                                                                                                                                                                                                                                                   | доклад<br>презентации<br>Т – тест<br>Коллоквиум,<br>задачи,<br>контрольная<br>работа | Устная<br>письменная  |
| Тема 6.<br>Определенны<br>й интеграл                                                                     | Текущий<br>контроль                     | Понятие определенного интеграла, теорема о достаточных условиях интегрируемости функции, геометрический смысл определенного интеграла; основные свойства определенного интеграла; основная теорема интегрального исчисления, теорема о замене                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | доклад<br>презентации<br>Т – тест<br>Коллоквиум,<br>задачи,                          | Письменная<br>устная  |

|                                                                     |                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                       |                   |
|---------------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-------------------|
|                                                                     |                          | переменной в определенном интеграле, теорема об интегрировании по частям в определенном интеграле, теорема о вычислении площади плоской фигуры                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | контрольная работа                                                    |                   |
| Тема 7<br>Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных | Текущий контроль         | Понятие арифметического $n$ -мерного пространства, расстояния между точками в пространстве, окрестности точки; определение функций $n$ переменных, примеры таких функций; понятия предела функции $n$ переменных, непрерывности функции нескольких переменных в точке и на множестве; частные производные функции нескольких переменных, теорема о смешанных производных, понятие эластичности функции нескольких переменных по фиксированной переменной, понятия производной по направлению и градиента функции нескольких переменных, теорема о вычислении производной по направлению; | доклад с презентацией Т – тест Коллоквиум, задачи, контрольная работа | Письменная Устная |
| Тема 8<br>Обыкновенные дифференциальные уравнения                   | Текущий контроль         | Понятие дифференциального уравнения первого порядка и его решения. Существование и единственность решения задачи Коши; Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка и методы нахождения их решений: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные и уравнения Бернулли; Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка; Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами; Приближенные методы нахождения решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.                      | доклад с презентацией Т – тест Коллоквиум, задачи, контрольная работа | Письменная Устная |
| Тема 9<br>Числовые ряды. Степенные ряды                             | Текущий контроль         | Понятие числового ряда; сумма числового ряда, теорема о сумме бесконечной геометрической прогрессии, свойства сходящихся числовых рядов, теорема о необходимом условии сходимости ряда, пример; теорема о предельном признаке сравнения для рядов с положительными членами, условие сходимости обобщенного гармонического ряда, признак Даламбера; понятие об абсолютной и условной сходимости знакопеременного ряда, признак Лейбница. Понятие степенного ряда и его области сходимости, определение радиуса сходимости степенного ряда и теорема о его вычислении.                     | доклад с презентацией Т – тест Коллоквиум, задачи, контрольная работа | Письменная Устная |
| Все темы и разделы:                                                 | Промежуточная аттестация | Обобщенные результаты обучения по овладению теоретическими знаниями и практическими навыками                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Т – тест (1-30)                                                       | Письменная        |

### 3. ПОКАЗАТЕЛИ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КОМПЕТЕНЦИЙ

Оценка знаний, умений, владений выражается в пятибалльной системе.

Таблица 3.1 – Текущий контроль

| п/п | Виды работ        | Критерии оценивания                             |                             |                                                             |                                                                          |
|-----|-------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
|     |                   | Неудовлетворительно (2 балла)                   | Удовлетворительно (3 балла) | Хорошо (4 балла)                                            | Отлично (5 баллов)                                                       |
| 1   | Работа на лекциях | Отсутствие участия студента в работе на занятии | Единичное высказывание      | Высказывание суждений, активное участие в работе на занятии | Высказывание неординарных суждений, активное участие в работе на занятии |

|   |                                                                            |                                                                |                                          |                                                                                                     |                                                                                                    |
|---|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2 | Работа на практических занятиях, решение общих практических задач          | Отсутствие участия в обсуждении, решении, неправильное решение | Единичное высказывание, решение ошибками | Высказывание суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение с отдельными замечаниями | Высказывание неординарных суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение без ошибок |
| 3 | Работа на практических занятиях, решение индивидуальных практических задач | Отсутствие участия в обсуждении, решении, неправильное решение | Единичное высказывание, решение ошибками | Высказывание суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение с отдельными замечаниями | Высказывание неординарных суждений, активное участие в ходе решения, правильное решение без ошибок |

Критерии оценивания формулируются для каждой компетенции и отражают деятельность обучающегося, поддающуюся измерению.

Таблица 3.2 – Обобщенные критерии оценивания освоения компетенции

| Неудовлетворительно<br>(2 балла)                                                                                                               | Удовлетворительно<br>(3 балла)                                                                                                                                                                                   | Хорошо<br>(4 балла)                                                                                             | Отлично<br>(5 баллов)                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Компетенция не освоена. Обучающийся не показывает знания, входящие в состав компетенции, понимает их необходимость и/или не может их применять | Компетенция освоена. Обучающийся показывает общие знания, входящие в состав компетенции, имеет представление об их применении, умение извлекать и использовать основную (важную) информацию из полученных знаний | Компетенция освоена. Обучающийся показывает полноту знаний, демонстрирует умения и навыки решения типовых задач | Компетенция освоена. Обучающийся показывает глубокие знания, демонстрирует умения и навыки решения сложных задач, умение принимать решения, создавать и применять документы, связанные с профессиональной деятельностью; способен самостоятельно решать проблему/задачу на основе изученных методов, приемов и технологий. |

#### 4. ШКАЛА ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА

Таблица 4.1 – Шкала критериев оценивания компетенций

| Оценка                           | Содержание                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Неудовлетворительно<br>(2 балла) | Демонстрирует непонимание проблемы, не восприятие материала. Работа незакончена и/или это плагиат                                                                                                                                                                                                                           |
| Удовлетворительно<br>(3 балла)   | Демонстрирует частичное понимание проблемы. Большинство требований, предъявляемых, к заданию выполнены. Владение элементами заданного материала. В основном выполненный материал понятен и носит целостный характер                                                                                                         |
| Хорошо<br>(4 балла)              | Демонстрирует значительное понимание проблемы обозначенной дисциплиной. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены. Содержание выполненных заданий раскрыто и рассмотрено с разных точек зрения                                                                                                                      |
| Отлично<br>(5 баллов)            | Демонстрирует полное понимание проблемы. Все требования, предъявляемые к заданию выполнены. Продемонстрировано уверенное владение материалом дисциплины. Выполненные задания носят целостных характер, выполнены в полном объеме, структурированы, представлены различные точки зрения, продемонстрирован творческий подход |

Шкалы оценивания и процедуры оценивания результатов обучения по дисциплине регламентируются Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации

обучающихся по программам высшего образования.

## 5.

### 5.1.

## ПЕРЕЧЕНЬ ЗАДАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ:

Таблица - 5.1 Перечень заданий текущего контроля и их наименование

| Наименование оценочных средств | Содержание задания                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Доклад с презентацией          | Множества. Действия над множествами. Метод математической индукции. Связные, дискретные, замкнутые, открытые множества. Границы числовых множеств. Функции. Область определения, область значений, свойства. График функции. Свойства функций. Композиция функций.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| коллоквиум                     | Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Частные производные высших порядков. Дифференцируемая функция. Необходимое условие дифференцируемости функции. Достаточное условие дифференцируемости функции. Дифференциал функции двух переменных. Применение дифференциала к приближённым вычислениям. Инвариантность формы дифференциала. Дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции нескольких переменных. Неявная функция одной переменной. Теорема о существовании неявной функции одной переменной. Неявная функция двух переменных. Теорема о существовании неявной функции двух переменных. Экстремумы функции двух переменных. Необходимое условие существования экстремума. Достаточное условие существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных                                                                                                                                                                                          |
| Контрольная работа             | Сходимость и расходимость числовых рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Ряды с неотрицательными членами. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов. Сходимость, абсолютная сходимость и область сходимости функционального ряда. Степенные ряды, интервал сходимости. Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена. Тригонометрические ряды Фурье. Ряды Фурье четных и нечетных функций                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| задачи                         | Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Теорема существования и единственности. Частное, общее, особое решения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Метод разделения переменных. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным. Линейные уравнения. Методы интегрирования линейных уравнений. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения высших порядков. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Системы дифференциальных уравнений |
| Тест                           | Темы тестовых заданий: Функции, способы задания. Область определения, область значений функции. Предел функции в точке, на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Первый и второй замечательные пределы, следствия. Вычисление пределов с применением эквивалентных бесконечно малых величин. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функций на промежутке. Точки разрыва функции, их классификация                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |

## 5.2

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

**Первая контрольная точка - в форме доклада (письменная).**

Темы докладов: Темы докладов с презентацией

1. Множества. Действия над множествами.

2. Метод математической индукции.
3. Связные, дискретные, замкнутые, открытые множества.
4. Границы числовых множеств.
5. Функции. Область определения, область значений, свойства. График функции.
6. Свойства функций. Композиция функций.
7. Обратное отображение. Критерий обратимости отображения.
8. Элементарные функции, их свойства и графики.
9. Явно, неявно, параметрически заданные функции.
10. Последовательность, предел числовой последовательности.
11. Свойства сходящихся последовательностей.
12. Признаки существования предела. Предельный переход в неравенствах.
13. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.
14. Теоремы о пределе монотонной последовательности.
15. Вычисление пределов последовательностей.
16. Первый и второй замечательные пределы (случай дискретного аргумента).
17. Определение предела функции вещественного аргумента по Гейне и по Коши. Геометрический смысл предела функции.
18. Односторонние пределы. Критерий существования предела функций через односторонние пределы. Свойства предела функций.
19. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Предел композиции функции. Теоремы о пределе функций. Первый и второй замечательные пределы (случай непрерывного аргумента).
20. Определение непрерывности функции. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность элементарных функций.
21. Функции, непрерывные на отрезке. Теорема Вейерштрасса. Теорема о промежуточном значении.
22. Эквивалентные бесконечно малые.
23. Производная и дифференциал. Геометрический и физический смысл.
24. Правила вычисления производной и дифференциала.
25. Таблица производных основных элементарных функций.
26. Производные и дифференциалы высших порядков.
27. Основные теоремы дифференциального исчисления: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши..

### **Методические рекомендации:**

Обучающийся может подготовить не более пяти докладов с презентацией. Критерии оценки одного доклада с презентацией: 5 баллов выставляется обучающемуся, если он перечисляет все существенные характеристики обозначенного в вопросе предмета и возможные варианты дальнейшего развития решения проблемы, если это возможно; 4 балла, если студент раскрыл только часть основных положений вопроса, продемонстрировал неточность в представлениях о предмете вопроса; 3 балла, если студент обозначил общую траекторию ответа, но не смог конкретизировать основные компоненты; 2 балла, если студент не продемонстрировал знаний основных понятий, представлений об изучаемом предмете.

Методические указания по написанию доклада с презентацией. Требования, предъявляемые к докладу с презентацией:

1. Объем доклад не должен превышать 5-8 страниц. Печать производится через 1,5 интервала, размер шрифта 14, с выравниванием по ширине. Левое поле листа 30 мм, правое – 10 мм, верхнее – 20 мм, нижнее 20 мм. Текст должен оформляться абзацами с отступом 1,25 см.
2. Эссе должно восприниматься как единое целое, идея должна быть ясной и понятной.
3. Необходимо писать коротко и ясно. Эссе не должно содержать ничего лишнего, должно включать только ту информацию, которая необходима для раскрытия вашей позиции, идеи.
4. Доклад должно иметь грамотное композиционное построение, быть логичным, четким по структуре.

5. Каждый абзац доклад должен содержать только одну основную мысль.
6. Доклад должен показывать, что его автор знает и осмысленно использует теоретические понятия, термины, обобщения, мировоззренческие идеи.
7. Доклад должен содержать убедительную аргументацию заявленной по проблеме позиции.

### контрольная точка - в форме теста (письменная).

#### Тесты

**Выберите один вариант ответа:**

**Тест по теме «ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ»**

#### 1 вариант

1. Указать область определения функции  $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$  является множество  
 1)  $(-1;1) \cup (1;+\infty)$     2)  $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$     3)  $(1;+\infty)$     4)  $(-\infty;+\infty)$
2. Указать, какая из функций является четной  
 1)  $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x}$ ;  
 2)  $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ ;  
 3)  $f(x) = |x| - x$ ;  
 4)  $f(x) = x - 5e^{x^2/}$
3. Указать, чему равен предел функции  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$   
 1) 5;    2) 6;    3) 8;    4) 7
4. Указать, чему равен предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-5x}$   
 1) 1;    2) 0;    3)  $e^{3/2}$ ;    4)  $e^{5/2}$
5. Указать, является ли функция  $f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & x \geq -1 \end{cases}$  непрерывной?  
 1) да;    2) нет;    3) затрудняюсь ответить
6. Указать номер неверного утверждения об эквивалентности бесконечно-малых функции  
 1)  $\sin u \sim u$  ;    2)  $\cos u \sim u$  ;    3)  $\operatorname{tg} u \sim u$  ;    4)  $\operatorname{arctg} u \sim u$
7. Указать количество функций, уходящих в суперпозиции функций  
 $y = \sqrt{\ln(\sin x^3)}$   
 1) 4 ;    2) 3 ;    3) 5 ;    4) 2.
8. Указать функцию, эквивалентную в точке  $x = 0$  функции  
 $y = \ln(x^3 - 3x^2 + x - 4\sqrt{x} + 1)$   
 1)  $x^3$     2)  $\sqrt{x}$     3)  $-4\sqrt{x}$     4) 0
9. Указать функцию, эквивалентную на бесконечности функции  
 $y = (x^3 - 3x^2 + x - 4\sqrt{x} + 1)$   
 1)  $x^3$     2)  $\sqrt{x}$     3)  $-4\sqrt{x}$     4) 0
10. Указать, какое из отображений не является функцией  
 1)  $y = x^2$  ;    2)  $y = e^x$  ;    3)  $y = \pm\sqrt{x}$  ;    4)  $y = \sin x$

**Ключи:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 4 | 4 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 3  |

#### 2 вариант

1. Указать область определения функции  $y = \sqrt{\ln \frac{1}{x}}$   
 1)  $(-\infty;+\infty)$     2)  $[0;1)$     3)  $[1;+\infty)$     4)  $[e;+\infty)$
2. Указать, какие из приведенных ниже выражений не являются «неопределенными»?

- 1)  $\left[\frac{0}{0}\right]$       2)  $\left[\frac{c}{0}\right]$       3)  $[\infty-\infty]$       4)  $[0\cdot\infty]$

3. Записать утверждение в предельной форме

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon$$

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$       2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$   
 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$       4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$

4. Указать, какие из перечисленных функций являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$

- 1)  $\cos 2x$  ;      2)  $\operatorname{ctg} x/2$ ;      3)  $\operatorname{tg}^2 x$ ;      4)  $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

5. Указать, какие из перечисленных функций являются бесконечно большими при  $x \rightarrow 0$

- 1)  $\cos 2x$  ;      2)  $\operatorname{ctg} x/2$ ;      3)  $\operatorname{tg}^2 x$ ;      4)  $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

6. Указать условие, соответствующее понятию «эквивалентные бесконечно-малые»

- 1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$       2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$   
 3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$       4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \neq$

7. Указать значение предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$

- 1) 0      2) 1      3)  $\infty$       4)  $\nexists$

8. Указать значение предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$

- 1) -1      2)  $\infty$       3) -3      4) 1,5

9. Указать значение предела  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

- 1) 1      2)  $\frac{\pi}{2}$       3)  $\frac{2}{\pi}$       4)  $-\infty$

10. Указать значение предела

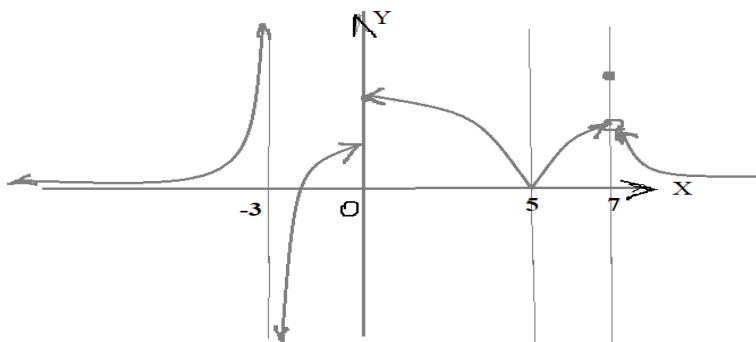
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$   
 1)  $e^3$       2) 1      3) 0      4)  $e^{-3}$

Ключи:

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 3 | 2 | 4 | 3 | 2 | 1 | 4 | 4 | 3 | 1  |

## Типовые оценочные материалы по теме 2

### Типовые вопросы для письменного опроса



- 1) Для функции, график которой представлен на рисунке  
 А) Определить тип разрыва функции в точке  $x = -3$ .  
 Б) Определить количество точек разрыва первого рода  
 2) Определить тип разрыва функции  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

Ответы:

1-

- А) точка бесконечного разрыва второго рода,  
 Б) в точке 0 и 7 имеются разрывы первого рода ,  
 2) В точке  $x=0$  функция терпит неустранимый разрыв первого рода.

### Типовые оценочные материалы по теме 3

#### Типовой тест по теме «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»

##### 1 вариант

1. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать тип асимптоты графика функции  $y = \ln(2x - 3)$

- 1) вертикальная;                      2) наклонная ;                      3) горизонтальная

2. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать уравнение горизонтальной асимптоты графика функции  $y = \frac{3x-6}{2x-1}$

- 1)  $y = 1$  ;                      2)  $y = 0,5$  ;                      3)  $y = 1,5$

3. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать условие выпуклости функции в точке  $x = x_0$

- 1)  $f''(x_0) < 0$ ;                      2)  $f'(x_0) < 0$ ; 3)  $f'(x_0) > 0$ ; 4)  $f''(x_0) > 0$ .

4. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать тип задания функции  $x^2 + y^2 = 1$ :

- 1) явное задание;  
 2) неявное задание;  
 3) параметрическое задание.

5. Соотнести ответ задачи с одним из перечисленных вариантов :

Задача: Определить лишний вариант формулы

- 1)  $df = f'(x)dx$     2)  $df = f'(x)\Delta x$     3)  $df \approx df(x)$     4)  $df = f'(x)$

6. . Соотнести ответ задачи с одним из перечисленных вариантов :

Задача: Указать точку, в которой для функции  $y = |x + 1|$  не существует производная

- 1) 0                      2) 1                      3) -1                      4) функция всюду дифференцируема.

7. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов

Вопрос: Указать лишнее условие монотонного возрастания функции на промежутке  $[a, b]$ ,

если

- 1)  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$   
 2)  $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$   
 3)  $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1 < x_2$

8. Укажите промежутки вогнутости функции  $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2$ :

- 1)  $(-\infty; -1)$ ;                      2)  $(-1; 2)$ ;                      3)  $(2; +\infty)$ ;                      4)  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

9. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов

Вопрос: Линеаризация функции - это:

- 1) замена функции на ее дифференциал;  
 2) замена функции на ее касательную;  
 3) замена функции на ее производную ;  
 4) замена функции на хорду, стягивающую концы графика функции .

10. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов

Вопрос: Вычислить значение предела, применив правило Лопиталя

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^2}$$

**Ключи:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 2 | 4 | 2 | 0  |

##### **Вариант 2**

1. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Какое из нижеперечисленных предложений определяет производную функцию

(когда приращение аргумента стремится к нулю)

- 1) Отношение приращения функции к приращению аргумента
- 2) Предел отношения функции к приращению аргумента
- 3) Отношение функции к пределу аргумента
- 4) Отношение предела функции к аргументу
- 5) Предел отношения приращения функции к приращению аргумента

2. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов:

Вопрос: Производная обратной функции равна

- 1)  $\frac{y'_t}{x'_t}$
- 2)  $-\frac{1}{x'_y}$
- 3)  $\frac{x'_t}{y'_t}$
- 4)  $\frac{1}{x'_y}$

3. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Условие  $f(x_0) \geq f(x)$ , если  $x_0 < x$  соответствует функции, которая

- 1) возрастает;
- 2) не убывает;
- 3) не возрастает;
- 4) убывает.

4. Указать лишнее

Вопрос:  $f'(x_0)=0$ , если:

- 1)  $x_0$  – точка экстремума
- 2)  $f(x)=0$
- 3)  $f(x)=\text{const}$
- 4)  $df(x)>0$

5. Соотнести ответ задачи с одним из перечисленных вариантов :

Задача: Производная функции  $xy = e^{xy}$  равна

- 1)  $\frac{y - ye^{xy}}{xe^{xy} - x}$
- 2)  $-\frac{y - ye^{xy}}{xe^{xy} - x}$
- 3)  $\frac{ye^{xy}x - e^{xy}}{x^2}$
- 4)  $-\frac{ye^{xy}x - e^{xy}}{x^2}$

6. . Соотнести ответ задачи с одним из перечисленных вариантов :

Задача: Производная функции  $\begin{cases} y = \sin t \\ x = \cos t \end{cases}$  равна

- 1)  $\frac{1}{\sin t}$
- 2)  $-\frac{1}{\cos t}$
- 3)  $\operatorname{tg} t$
- 4)  $\operatorname{ctg} t$

7. Укажите лишнее

Вопрос: Если точка  $x_0$  – точка перегиба графика функции, то

- 1)  $f'(x_0)=0$  и  $f''(x)<0$  в окрестности точки  $x_0$
- 2)  $f''(x_0)=0$  и  $f''(x)>0$  в окрестности точки  $x_0$
- 3)  $f''(x_0)=0$  и  $f''(x)=0$  в окрестности точки  $x_0$

8. Укажите, при каком условии прямая  $y = kx + b$  является наклонной асимптотой графика функции:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = b$
- 2)  $k = f'(x_0)$  и  $b = f(x_0)$
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x} = k$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f'(x) - kx] = b$
- 4) нет верного ответа

9. Соотнести ответ задачи с одним из перечисленных вариантов :

Задача: Найти промежутки возрастания функции  $y = x^2 - 3x + 2$

- 1)  $x \in R$
- 2)  $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$
- 3)  $(1, 5; +\infty)$
- 4)  $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

10. Указать, какой предел можно вычислить только по правилу Лопиталя

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctg x}{x^2}$$

**Ключи:**

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 4 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 1 | 3 | 4  |

### Контрольная работа по теме 3

#### Вариант № 1

1. Найти пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x} - 1}$$

$$б) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \frac{1}{x-2}$

Построить схематично график этой функции в окрестности точки  $x = 2$ .

3. Найти  $\frac{dy}{dx}$ :

$$a) y = e^{\operatorname{tg}^2 x / \sqrt[3]{x}}$$

$$б) y = [\ln(x+1)]^{x^2}$$

$$в) \cos x + \cos y = xy$$

4. Составить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} y = a(1 - \cos t) \\ x = a(t - \sin t) \end{cases}$$

в точке с параметром  $t = \pi/2$

#### Вариант № 2

1. Найти пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2} - \sqrt{9-2x+x^2}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$б) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2-1}{x^2} \right)^{x^4}$$

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 1 \\ 3-ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

При каком выборе числа  $a$  функция будет непрерывной?

Построить график этой функции.

3. Найти  $\frac{dy}{dx}$ :

$$a) y = \ln \frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$б) y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$в) e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$$

4. Для функции  $y = \sqrt{\arcsin x}$  найти  $dy$  и вычислить его при  $x = \frac{1}{2}$  и  $\Delta x = 0,003$

**Вариант № 3**

1. Найти пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2 + x^3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{ctg^2 x}$

2. Исследовать на непрерывность функцию  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ Построить схематично график этой функции в окрестности точки  $x = 0$ 3. Найти  $\frac{dy}{dx}$  :

а)  $y = \operatorname{arctg} e^{2x} + \ln \sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$

б)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$

в)  $y^2 = x^2$

4. Для функции, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = t^2 \\ t^3 \\ \frac{1}{3} - t \end{cases}$$

найти  $dy$  при  $t = 3$  и  $dx = 0,06$ **Вариант № 4**

1. Найти пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x} \right)^x$

2. Исследовать на непрерывность функцию  $y = e^{\frac{1}{x+1}}$ Построить схематично график этой функции в окрестности точки  $x = -1$ 3. Найти  $\frac{dy}{dx}$  :

а)  $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}(x + \frac{1}{x})}$

б)  $y = x^2 e^{x^3} \sin 5x$

в)  $2y \ln y = x$

4. Найти приближенное значение приращения функции  $y = \operatorname{tg} x$  при изменении  $x$  от  $45^\circ$  до $45^\circ 6'$ **Вариант № 5**

1. Найти пределы:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. Исследовать на непрерывность функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Построить график этой функции.

3. Найти  $\frac{dy}{dx}$ :

а)  $y = \sin^2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)$

б)  $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\sqrt{x}}$

в)  $x + y = \arcsin x - \arcsin y$

4. Вычислить значение дифференциала функции  $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$  при изменении  $x$  от  $60^\circ$  до  $60^\circ 10'$

## Типовые оценочные материалы по теме 4

### Типовой тест

#### 1 вариант

1. Определить значение полного приращения функции  $z = x^2 * \sqrt{y}$  в точке  $M_0(3; 4)$ , если  $\Delta x = -0,1$  ;  $\Delta y = 0,41$ .

2. Определить значение полного дифференциала функции  $z = e^{x-2y}$  в точке  $M_0(0;0)$ , если  $\Delta x = 0,1$  ;  $\Delta y = 0,2$ .

3.: Определить длину градиента функции  $z = \sin(4x + 3y)$  в точке  $M_0(0;0)$ .

4. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать условия для определения максимума функции двух переменных:

1) Гессениан в стационарной точке положителен;

2) Гессениан в стационарной точке отрицателен;

3) Гессениан в стационарной точке равен 0.

5.. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать условие определения условного минимума функции двух переменных:

1)  $d^2 F > 0$  2)  $d^2 F < 0$  3)  $d^2 F = 0$  4)  $f'_x = f'_y = 0$  .

6. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Указать лишнее свойство градиента:

1) показывает направление наискорейшего роста функции;

2) направлен по нормали;

3) производная по направлению равна скалярному произведению градиента на орт направления;

4) если  $\operatorname{grad} f(M_0) = \vec{0}$ , то  $M_0$  – точка экстремума.

7. Указать вторую смешанную производную

1)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  2)  $\frac{d^2 f}{dy^2}$  3)  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  4)  $\frac{d^2 f}{dx dy}$

8. Указать условие точки разрыва второго рода

1)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0)$

2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \nexists$

3)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \pm \infty$

9. Вычислить произведение абсциссы и ординаты стационарной точки для функции  $z = xy^2 - 4x - 8y$

10. Указать значение частной производной  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ , если известно, что

$$d^2 f = 6xy^2 dx^2 + 12x^2 y dx dy + 2x^3 dy^2$$

1)  $6xy^2$

2)  $12x^2 y$

3)  $2x^3$

4)  $6x^2 y$

Ключи:

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|

|      |   |     |   |   |   |   |   |   |    |   |
|------|---|-----|---|---|---|---|---|---|----|---|
| 0,32 | - | 0,1 | 5 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 16 | 1 |
|------|---|-----|---|---|---|---|---|---|----|---|

### Вариант 2

1. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: частная производная функции в точке – это

- 1) функция                      2) число                      3) вектор                      4) матрица

2. Указать формулу частной производной неявно заданной функции  $F(x, y, z) = 0$  по переменной  $x$

- 1)  $nx^{n-1}$                       2)  $\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}$                       3)  $-\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial z}$  ;                      4)  $-\frac{\partial F}{\partial z} : \frac{\partial F}{\partial x}$

3. Указать, какому поведению функции соответствует условие: производная по направлению больше нуля

- 1) возрастает;  
2) не убывает;  
3) не возрастает;  
4) убывает.

4. Соотнести ответ на вопрос с одним из перечисленных вариантов :

Вопрос: Градиент функции – это:

- 1) функция                      2) число                      3) вектор                      4) матрица

5. Соотнести ответ на вопрос с одним из предложенных вариантов

Вопрос: Геометрический смысл дифференциала функции в точке – это

- 1) приращение ординаты функции  
2) приращение аппликаты касательной  
3) приращение аппликаты функции  
4) приращение ординаты касательной

6. Указать, в каком направлении производная по направлению принимает наибольшее значение:

- 1) орт оси OX                      2) орт оси OY                      3) орт оси OZ                      4) градиент функции

7. Указать значение смешанной производной второго порядка для функции  $z = e^{2x-3y}$

- 1)  $e^{2x-3y}$                       2)  $-3e^{2x-3y}$                       3)  $2e^{2x-3y}$                       4)  $-6e^{2x-3y}$

8.. Указать значение дифференциала функции  $z = x^2y^3 - x + y^2$  в точке  $M_0(-1,1)$ , если  $\Delta x = 0,1$  ;  $\Delta y = 0,05$ .

- 1)  $\{-3;-1\}$  ;                      2)  $\sqrt{10}$  ;                      3)  $-0,05$  ;                      4)  $-0,35$

9. Соотнести ответ на вопрос с одним из вариантов ответов

Вопрос: Для функции двух переменных условие положительного гессиниана является:

- 1) необходимым  
2) достаточным  
3) необходимым и достаточным

10. .. Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Найти производную по направлению  $\vec{l} = \{3; 4\}$  функции  $z = xy^2 - 2x^2y$  в точке  $M(1,1)$ .

- 1)  $-1,8$  ;                      2)  $\{-1,8; 0\}$  ;                      3)  $1,8$  ;                      4)  $-3$

**Ключи:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 4 | 4 | 3 | 2 | 1  |

### Контрольная работа по теме 4

#### Вариант 1

1. Найти градиент и его величину в точке  $M(3;4)$  для функции  $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$

2. Найти приближенное значение функции  $1,02^{3,01}$

3. Вычислить  $\frac{dz}{dt}$  если  $z = \ln \sin(3x + \pi y)$ ;  $\begin{cases} x=t^2 \\ y=e^t \end{cases}$

4. Найти локальный экстремум функции  $z = 3x^2y - x^3 - y^4$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$

### Вариант 2

1. Найти производную по направлению вектора  $\overrightarrow{MN}$  для функции  $z = x^3y^2$  в точке  $M(1;-1)$ , если  $N(0;1)$ .  
 2. Найти приближенное значение функции  $\ln(1 - 0,1 + 0,2^2)$   
 3. Вычислить  $\frac{dz}{dt}$  если  $z = e^{\frac{x^2 - xy^2}{y}}$   $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t \end{cases}$   
 4. Найти локальный экстремум функции  $z = 6xy - 3x^2$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = 2x + 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

### Вариант 3

1. Найти градиент и его величину в точке  $M(e;1)$  для функции  $z = \ln(xy^2)$   
 2. Найти приближенное значение функции  $(2,01)^{\sqrt{3,95}}$   
 3. Вычислить  $\frac{dz}{dv}$  если  $z = \sin^2(3x - 4y)$ ;  $\begin{cases} x = \frac{u}{v} \\ y = u^v \end{cases}$   
 4. Найти локальный экстремум функции  $z = (x + 2)^2 + (y - 1)^2$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = x^4 + y^4 \\ x + y = 4 \quad (x, y \geq 0) \end{cases}$

### Вариант 4

1. Найти производную по направлению вектора  $\vec{l} = \{\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\}$  для функции  $z = xy \cdot e^{x+y}$  в точке  $M(0;1)$ .  
 2. Найти приближенное значение функции  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$   
 3. Вычислить  $\frac{dz}{du}$  если  $z = x^y$   $\begin{cases} x = 3u \cdot v \\ y = 7u + 5v \end{cases}$   
 4. Найти локальный экстремум функции  $z = y^2x - yx^2 - 3xy + 2$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = x + y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

### Вариант 5

1. Найти градиент и его величину в точке  $M(1;-1)$  для функции  $z = e^{\frac{(x^2)}{y}}$   
 2. Найти приближенное значение функции  $2,98^{1,01}$   
 3. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial v}$  если  $z = \sqrt{x^3 - 2xy^2}$ ;  $\begin{cases} x = uv \\ y = \frac{u}{v} \end{cases}$   
 4. Найти локальный экстремум функции  $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = 2x + y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

### Вариант 6

1. Найти производную по направлению вектора  $\vec{l} = \{2; -1\}$  для функции  $z = \frac{x-y^2}{xy}$  в точке  $M(1;1)$ .  
 2. Найти приближенное значение функции  $tg43^\circ \cdot \sin 29^\circ$   
 3. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial u}$  если  $z = \ln \frac{x}{y}$ ;  $\begin{cases} x = u + 3v \\ y = u \cdot v^2 \end{cases}$   
 4. Найти локальный экстремум функции  $z = 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 - 1$   
 5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$

### Вариант 7

1. Найти производную по направлению вектора  $\vec{l} = 2\vec{i} - \vec{j}$  для функции  $z = \frac{x^3}{y}$  в точке

M(1;2).

2. Найти приближенное значение функции  $\arctg(\frac{0,01}{1,1}+1)$

3. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial u}$  если  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ;  $\begin{cases} x=4u+\frac{v}{2} \\ y=2u \cdot v \end{cases}$

4. Найти локальный экстремум функции  $z = x^2 + xy^2 + 6xy$

5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z=2xy \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$

### Вариант 8

1. Найти градиент и его величину в точке M(4; $\frac{\pi}{4}$ ) для функции  $z = x^2 \sin(xy)$

2. Найти приближенное значение функции  $\arcsin(0,48+0,47)$

3. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial v}$  если  $z = \arccos \frac{x}{y}$ ;  $\begin{cases} x=5u+3v \\ y=2v^3 \end{cases}$

4. Найти локальный экстремум функции  $z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y - 2$

5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z=xy \\ x+y=3 \end{cases}$

### Вариант 9

1. Найти градиент и его величину в точке M(3;4) для функции  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

2. Найти приближенное значение функции  $\sqrt[3,02]{8,01}$

3. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial t}$  если  $z = \arcsin(xy^2)$ ;  $\begin{cases} x=e^t \\ y=\sqrt[4]{t} \end{cases}$

4. Найти локальный экстремум функции  $z = 3xy^2 - y^3 - x^2$

5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z=2x^2+3y^2 \\ x+y=1 \quad (x,y \geq 0) \end{cases}$

### Вариант 10

1. Найти производную по направлению вектора  $\overrightarrow{MN}$  для функции  $z = x^2 + y^2 \cdot x$  в точке M(1;2), если N(3;0).

2. Найти приближенное значение функции  $\sqrt{1,02} \cdot (0,97)^2$

3. Вычислить  $\frac{dz}{dt}$  если  $z = \ln \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$   $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=\sqrt{t^2+1} \end{cases}$

4. Найти локальный экстремум функции  $z = x^2 - 2x + y^2 - 2y + 6$

5. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z=x^2-y^2 \\ 3x-y=1 \end{cases}$

### Типовые оценочные материалы по теме 5

#### Контрольная работа по теме 5

##### 1 вариант

1.  $\int \frac{dx}{\sin^2(3x-5)}$

2.  $\int x^2 e^{5x^3} dx$

3.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

4.  $\int \frac{2x+5}{3x^2+11x+2} dx$

5.  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

6.  $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x} dx$

7.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

##### 2 вариант

1.  $\int \frac{dx}{5-2x^2}$

2.  $\int x \sin^2 x dx$

3.  $\int \frac{(1+x)}{1+\sqrt{x}} dx$
4.  $\int \frac{(1-3x)dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$
5.  $\int \arccos x dx$
6.  $\int \frac{2x^2 - 4}{(x-1)(x+2)(x^2 + 2x + 10)} dx$
7.  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx$

### **3 вариант**

1.  $\int \frac{dx}{\sin^2 3x \cos^2 3x}$
2.  $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx$
3.  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x-4}}$
5.  $\int (x-3) \cos x dx$
6.  $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^2(x+5)}$
7.  $\int \sin 3x \sin 5x dx$

### **4 вариант**

1.  $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$
2.  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$
3.  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$
4.  $\int \frac{(1-x)dx}{5+2x-x^2}$
5.  $\int x \ln(1-x) dx$
6.  $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-3)(x+4)}$
7.  $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$

### **5 вариант**

1.  $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$
2.  $\int \sin^3 6x \cos 6x dx$
3.  $\int \sqrt{4-x^3} dx$
4.  $\int \frac{(5+2x)dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$
5.  $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$
6.  $\int \frac{(x^4-3)dx}{x^3-2x^2+2x-4}$
7.  $\int ctg^3 x dx$

### **6 вариант**

1.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3-7x^2}}$
2.  $\int \frac{x^3 dx}{(1-x^4)}$

3.  $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$
4.  $\int \frac{(3x+1)dx}{x^2+2x+8}$
5.  $\int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx$
6.  $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2+4)} dx$
7.  $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

### **7 вариант**

1.  $\int \frac{\cos^2 x + 3 \cos x - 2}{\cos^2 x} dx$
2.  $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt[7]{3x^5+7}}$
3.  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$
4.  $\int \frac{12+x}{5+4x-x^2} dx$
5.  $\int \arcsin x \, dx$
6.  $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x^2+1)(x-1)^2} dx$
7.  $\int \sin^4 x \, dx$

### **8 вариант**

1.  $\int \frac{x^2-9}{x^2-8} dx$
2.  $\int e^x \arctan e^x dx$
3.  $\int \sqrt{9+x^2} dx$
4.  $\int \frac{5-2x}{\sqrt{4x-3+x^2}} dx$
5.  $\int (x-3) \cos 2x \, dx$
6.  $\int \frac{x^4+5x+1}{x^3-x^2-2x} dx$
7.  $\int \cos^5 x \, dx$

## **Типовые оценочные материалы по теме 6**

### **Типовой тест**

#### **1 вариант**

1. Укажите ряд, не являющийся знакопеременным

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \geq 0$
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $a_n \in \mathbf{R}$
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ,  $a_n \geq 0$
- 4)  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$

2. Укажите тип ряда Тейлора:

- 1) знакопеременный ряд
- 2) ряд с положительными членами
- 3) знакочередующийся ряд
- 4) степенной ряд

3. Укажите, какие признаки являются достаточными для исследования сходимости ряда с положительными членами:

- 1) Признак Даламбера
- 2) Признак Лейбница
- 3) Радикальный признак Коши
- 4) Интегральный признак Коши
- 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

4. Укажите тип ряда Фурье:

- 1) знакопеременный ряд
- 2) ряд с положительными членами
- 3) знакочередующийся ряд
- 4) функциональный ряд

5. Укажите правильный вариант : Если для степенного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x - 1/2)^n$  радиус сходимости  $R=2$ , то , то в точке  $x=-1$  ряд:

- 1) сходится абсолютно;
- 2) расходится;
- 3) сходится условно
- 4) может сходиться или расходиться.

6. Вычислите третий член ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4^n}$

- 1) -0,0625
- 2) -3
- 3) 3
- 4) 0,0625

7. Указать номера сходящихся рядов

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} (-1)^n$
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

8. Указать радиус сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{n!}$

- 1) 0
- 2) 1
- 3) -1
- 4)  $\infty$

9. Указать функцию, соответствующую ряду  $1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}(x-1)^3 + \dots$ :

- 1)  $e^x$
- 2)  $e^{x-1}$
- 3)  $\ln(1+x)$
- 4)  $\sin(x-1)$ ;

10. Указать интервал сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n+1)^3}$

- 1)  $x=0$
- 2)  $x \in R$
- 3)  $(-1;1)$
- 4)  $[-1;1]$ .

**Ключи:**

| 1 | 2 | 3   | 4 | 5 | 6 | 7   | 8 | 9 | 10 |
|---|---|-----|---|---|---|-----|---|---|----|
| 3 | 4 | 134 | 4 | 1 | 4 | 234 | 4 | 2 | 3  |

### **Вариант 2**

1. Укажите ряд, не являющийся знакопеременным

- 1)  $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$
- 2)  $3 - 5 + 7 - 9 + \dots$
- 3)  $3 + 5 - 7 + 9 + \dots$
- 4)  $3 - 5 - 7 - 9 + \dots$

2. Укажите, какой признак используется для исследования знакочередующихся рядов

- 1) Признак Даламбера
- 2) Радикальный признак Коши
- 3) Интегральный признак Коши
- 4) Признак Лейбница

3. Укажите, какой признак лучше применить для исследования сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n+1}{2n^2} \right)^n$$

- 1) Признак Даламбера
- 2) Признак Лейбница
- 3) Радикальный признак Коши
- 4) Интегральный признак Коши
- 5) Признак сравнения

4. Укажите условие, являющееся необходимым для разложения функции в ряд Маклорена
- 1) периодичность
  - 2) непрерывность
  - 3) бесконечно-дифференцируемая
  - 4) все перечисленные условия

5. Укажите правильные варианты : Если степенной ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$  сходится в точке 8, то в точке  $x=3$  ряд:

- 1) сходится абсолютно;
- 2) расходится;
- 3) сходится условно.
- 4) может сходиться или расходиться.

6. Укажите вид 3-го члена ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n}$

- 1) -0,0625
- 2) -3
- 3) 3
- 4) 0,0625

7. Указать расходящийся ряд

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}$
- 2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2}$
- 3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- 4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

8. Указать радиус сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$

- 1) 0
- 2) 1
- 3) -1
- 4)  $\infty$

9. Указать лишнее: Для разложения функции  $y = \sin x^2$  использовался :

- 1) степенной ряд
- 2) ряд Тейлора
- 3) ряд Маклорена
- 4) числовой ряд;

10. Указать область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3n+5}$

- 1)  $x=0$
- 2)  $x \in R$
- 3)  $(-1;1)$
- 4)  $[-1;1]$ .

**Ключи:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| 1 | 4 | 3 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 4 | 3  |

## Контрольная работа по теме 6

### 1 вариант

1. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{2n+1}}$

2. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{kn(1-x) - \sin x}{x^2}$$

3. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничиться двумя членами ряда.

$$\int_0^{0,5} \cos x^2 dx$$

### 2 вариант

1. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x-2)^n}{2^n(n^2+1)}$

2. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \sin x}{x^3}$$

3. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение

подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничиться двумя членами ряда.

$$\int_0^{0,1} \frac{e^{-1} - 1}{x} dx$$

### **3 вариант**

1. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}(x+1)^{2n-1}}{4^n(n^2)}$

2. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^{-x} - \sin x^2}{5x^3}$$

3. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничиться двумя членами ряда.

$$\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

### **4 вариант**

1. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{9^n \sqrt[3]{n^3}}$

2. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+2x)}{2x^2}$$

3. Вычислить приближенно определенный интеграл, используя разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена. Ограничиться двумя членами ряда.

$$\int_0^{0,3} \frac{\arctg gx}{x} dx$$

Инструкция по выполнению. Выбрать один правильный ответ

Критерии оценивания: • 5 баллов выставляется, если обучающийся ответил правильно на 100-85% заданий теста; • 4 балла выставляется, если обучающийся ответил на 84-69 % заданий; • 3 балла выставляется, если обучающийся ответил на 68-50% заданий; 2 балла выставляется, если обучающийся ответил менее, чем на 50 % заданий.

### **Контрольная точка в форме коллоквиума (устная).**

Вопросы для коллоквиума

Программа коллоквиума «Пределы функций»

I. Теоретический вопрос

1. Понятие множества. Основные числовые множества: отрезок, интервал, полуинтервал. Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки. Примеры.

2. Действительная функция действительного переменного. График функции. Множество значений функции.

Способы задания функции. Классификация основных элементарных функций. Общие свойства функции:

ограниченность, монотонность функции, чётность (нечётность), периодичность. Примеры.

3. Числовая последовательность. Определение конечного предела последовательности, его геометрический смысл. Бесконечные пределы последовательности. Теорема о единственности предела последовательности; теорема существования предела последовательности.

4. Понятие предела функции, его геометрический смысл. Теорема об ограниченности функции, имеющей конечный предел.

5. Понятие бесконечно малых функций. Пример. Теоремы о бесконечно малых функциях.

6. Теоремы о пределе суммы, произведения, частного. Пределы элементарных функций.

7. Определения пределов функции с геометрической иллюстрацией.

8. Бесконечно большие функции. Теоремы о бесконечно больших функциях.

9. Пределы целой рациональной функции при  $x \rightarrow a$  и  $x \rightarrow \pm\infty$ . Примеры.
10. Пределы дробно рациональной функции при  $x \rightarrow a$  и  $x \rightarrow \pm\infty$ . Примеры.
11. Теорема о сохранении функцией знака своего предела; теорема о переходе к пределу в неравенстве; теорема о пределе промежуточной функции
12. Пределы тригонометрических функций. Первый замечательный предел, следствия из него. Примеры.
13. Предел показательной функции. Понятие показательно-степенной функции. Теорема о пределе показательно-степенной функции. Виды неопределенностей в случае показательно-степенной функции. Второй замечательный предел. Примеры.
14. Предел логарифмической функции. Примеры.
15. Третий замечательный предел. Четвёртый замечательный предел.

#### Коллоквиум «Неопределённый интеграл»

I. Теоретический вопрос 1. Понятие первообразной функции. Свойства первообразной. 2. Определение неопределённого интеграла и его свойства. Теорема существования неопределённого интеграла. 3. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле. 4. Вывод формул  $\int dx a^2+x^2 = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$ ,  $\int dx x^2-a^2 = \frac{1}{2a} \ln |x-a| |x+a| + C$ ,  $\int dx \sqrt{a^2-x^2} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ,  $\int dx \sqrt{x^2+A} = \ln|x + \sqrt{x^2+A}| + C$ . 5. Метод интегрирования по частям. Два случая применения. 6. Вывод формулы  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$ . 7. Простейшие рациональные дроби (4 типа). Интегрирование простейших рациональных дробей. 8. Интегрирование дробно-рациональной функции общего вида. Теорема о разложении дроби на сумму простейших дробей. Нахождение коэффициентов разложения. 9. Интегрирование иррациональных функций. Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \dots, \sqrt[n_k]{x^{m_k}}) dx$ ,  $\int R(x, (ax+bx^2+cx+d)^{m_1}, (ax+bx^2+cx+d)^{m_2}, \dots, (ax+bx^2+cx+d)^{m_k}) dx$ . 10. Подстановки Эйлера в интегралах вида  $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ . Частные случаи. 11. Интегрирование биномиального дифференциала. Подстановки Чебышёва. 12. Интегрирование тригонометрических функций  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ . Универсальная подстановка. 13. Интегрирование тригонометрических функций. Частные случаи. II. Вычислить неопределённый интеграл

#### Программа коллоквиума «Определённый интеграл»

I. Теоретический вопрос 1. Понятие интегральной суммы и определённого интеграла. 2. Необходимое условие интегрируемости. Замечание с примером. 3. Геометрический смысл определённого интеграла. 4. Теорема существования определённого интеграла. 5. Свойства определённого интеграла. 6. Определённый интеграл как функция переменного верхнего предела. 7. Формула Ньютона-Лейбница. 8. Замена переменной в определённом интеграле. 9. Интегрирование по частям в определённом интеграле. 10. Интеграл от чётной и нечётной функции по симметричному промежутку. 11. Вычисление площадей плоских фигур посредством определённого интеграла. 12. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах. 13. Достаточное условие спрямляемости дуги. 14. Объём тела с известным поперечным сечением. 15. Объём тела вращения. 16. Площадь поверхности вращения

#### Программа коллоквиума «Кратные и криволинейные интегралы»

I. Теоретический вопрос 1. Понятие двойного интеграла. Существование двойных интегралов и их свойства. 2. Вычисление двойных интегралов по прямоугольным областям. Теорема о вычислении двойного интеграла по прямоугольной области. 3. Понятие нормальных областей первого и второго типа. Теоремы о вычислении двойного интеграла по нормальной области первого и второго типа. 4. Геометрические приложения двойных интегралов. 5. Механические приложения двойных интегралов. 6. Понятие криволинейного интеграла первого рода. Теорема существования криволинейного интеграла первого рода. Вычисление криволинейного интеграла первого рода в зависимости от способа задания уравнения кривой  $\Gamma$ . 7. Понятие криволинейного интеграла второго рода. Свойства криволинейного интеграла второго рода. Теорема существования криволинейного интеграла второго рода. 8. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина. 9. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Криволинейный интеграл как функция точки. Теорема об эквивалентности четырех предложений.

### Методические рекомендации:

Обучающийся может подготовить не более двух ответов на вопросы к коллоквиуму. Критерии оценивания одного ответа: 5 баллов выставляется обучающемуся, если он перечисляет все существенные характеристики обозначенного в вопросе предмета и возможные варианты дальнейшего развития решения проблемы, если это возможно; 4 балла, если студент раскрыл только часть основных положений вопроса, продемонстрировал неточность в представлениях о предмете вопроса; 3 балла, если студент обозначил общую траекторию ответа, но не смог конкретизировать основные компоненты; 2 балла, если студент не продемонстрировал знаний основных понятий, представлений об изучаемом предмете

### Контрольная точка - в форме задач (письменная).

Тип (форма) задания: задачи. Пример типовых заданий (оценочные материалы): Модуль «Введение в анализ» (1 курс, 2 семестр)

Задачи по теме «Пределы функций»: Вычислить пределы функций, указывая используемые теоремы о пределах: 1)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5x^2 + 6x + 1)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 - 5x^2 + 4)$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 \cdot x^2 - 1$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \cdot 1 - x$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 + x \cdot x^4 - 3x^2 + 1$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - \sqrt{1+x}^2 \sqrt{1+x+1}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x \sin 2x$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5x - 5 - x \cdot x$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+1 \cdot x - 4) \cdot 3x$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 5 \cdot 3x) \cdot x$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 8)$ ; 12)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^2 + 1)$ ; 13)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 5x^2 - 3$ ; 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 + 3x^2 \cdot x^5 + x^3 + 2x^2$ ; 15)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 1 \cdot 2x^2 + 1$ ; 16)  $\lim_{x \rightarrow 1} x - \sqrt{x} \cdot x - 1$ ; 17)  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+4x) \cdot 2x$ ; 18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x - \cos x \cdot x \sin 5x$ ; 19)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 5 \cdot 3x + 5) \cdot 4x$ ; 20)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 4x) \cdot 2x - 1$ ; 21)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 2x + 5)$ ; 22)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1)$ ; 23)  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x^2 - 5x + 6$ ;

Задачи по разделу «Определённый и несобственные интегралы»

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x - 2)^3$ ,  $y = 4x - 8$ . Сделать рисунок. 2. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделать рисунок. 3. Найти координаты центра тяжести линии  $x^2 + y^2 = 4$  в первой четверти. Сделать рисунок. 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \cos \varphi$ . Сделать рисунок. 5. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии  $\{x = 7(t - \sin t), y = 7(1 - \cos t)\}$  вокруг оси абсцисс. Сделать рисунок. 6. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 4x$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ , относительно оси абсцисс. Сделать рисунок.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\{x = 2 \cos t, y = 3 \sin t; x = 1 (x \leq 1)\}$ . Сделать рисунок. 8. Вычислить длину дуги первой арки  $\{x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)\}$ . Сделать рисунок. 9. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $y = x + 2$ ,  $y = x^2 - 6x + 8$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ , относительно оси абсцисс. Сделать рисунок. 10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ . Сделать рисунок. 11. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделать рисунок. 12. Найти координаты центра тяжести линии  $\{x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]\}$ . Сделать рисунок. 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x + 1)^2$ ,  $y^2 = x + 1$ . Сделать рисунок. 14. Вычислить длину дуги  $\{x = 3 \cos^3 t, y = 3 \sin^3 t; \pi/3 \leq t \leq 2\pi/3\}$ . Сделать рисунок. 15. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x^2$ ,  $y = x$ . Сделать рисунок. 16. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$ . Сделать рисунок. 17. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси ординат фигуры, ограниченной кривыми  $y = \cos x$ ,  $x = \pi/2$ ,  $y = 1$ . Сделать рисунок. 18. Вычислить статический момент линии  $x^2 + y^2 = 9$  под осью абсцисс относительно оси абсцисс. Сделать рисунок. 19. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2 + 3$ ,  $y = x^2 - 4x + 3$ . Сделать рисунок. 20. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением линии  $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$  вокруг полярной оси. Сделать рисунок. 21. Вычислить статический момент фигуры, ограниченной линиями  $0 \leq y \leq \sqrt{16 - x^2}$  относительно оси абсцисс. Сделать рисунок. 22. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = (x - 1)^2$ ,  $y^2 = x - 1$ . Сделать рисунок. 23. Вычислить объём тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной кривыми  $y = \cos 2x - \pi/4 \leq x \leq \pi/4$ . Сделать рисунок. 24. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной линиями  $y = 6 - x^2$ ,  $y = 2$ . Сделать рисунок

Задачи по теме «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

1. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \ln(\eta \sqrt{\xi} + 1)$ , где  $\xi = y^2 - 2x$ ,  $\eta = xy$ . 2. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \arcsin 2\xi \eta + 3$ , где  $\xi = y^3 + x$ ,  $\eta = 2x + y$ . 3. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = \operatorname{arctg}(e^\xi + \ln \eta)$ , где  $\xi = xy$ ,  $\eta = x - y$ . 4. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = 5\xi^2 + \eta$ , где  $\xi = \ln(x + 1)$ ,  $\eta = x + \sin y$ . 5. Найти  $u_x, u_y$ , если  $u = e^{\xi \cdot \eta}$ , где  $\xi = 2 \ln x - y$ ,  $\eta = y^2 - x^2$ . 6. Показать, что  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$ , если  $u = x \cdot \varphi(y \cdot x) - x^2 - y^2$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция. 7. Показать, что  $1 \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 1 \cdot x + 1 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z \cdot xy$ , если  $z = x \cdot \varphi(y \cdot x + 1)$ , где  $\varphi$

- произвольная дифференцируемая функция. 8. Показать, что  $1 \cdot y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 1 \cdot x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z$ , если  $z = \sqrt{xy} \cdot \varphi(y/x)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция. 9. Показать, что  $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + y \cdot x \cdot z = 0$ , если  $z = 1/x \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция. 10. Показать, что  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$ , если  $u = xy + x \cdot \varphi(y/x)$ , где  $\varphi$  - произвольная дифференцируемая функция. 11. Проверить: удовлетворяет ли уравнению  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  функция  $u = y/x$ ? 12. Проверить: удовлетворяет ли уравнению  $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$  функция  $u = \ln x \cdot y + x^3 - y^3$ ? 13. Проверить: удовлетворяет ли уравнению  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  функция  $u = \ln(x^2 + (y+1)^2)$ ? 14. Проверить: удовлетворяет ли уравнению  $y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  функция  $u = x/y$ ? 15. Проверить: удовлетворяет ли уравнению  $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  функция  $u = e^{xy}$ ? 16. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $2x^3y - 5y^2 + 6x = 6$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки (1,0). Найти  $dy/dx$ . 17. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $12xy^4 - 4x^2y = 8$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки (2,1). Найти  $dy/dx$ . 18. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $3y^2x - 2x^3y^4 + 2x = 3$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки (1,1). Найти  $dy/dx$ . 19. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $4x^2 + 3y^2 + xy = 6$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки (1,-1). Найти  $dy/dx$ . 20. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $x^3 + 6xy - y^3 = -8$  определяет неявную функцию  $y = \varphi(x)$  по крайней мере в окрестности точки (1,3). Найти  $dy/dx$ . 21. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $x^3 + 2y^3 + z^3 - xyz = 9$  определяет неявную функцию  $z = \varphi(x, y)$  по крайней мере в окрестности точки (2, 1, 1). Найти  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ . 22. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2$  определяет неявную функцию  $z = \varphi(x, y)$  по крайней мере в окрестности точки (-1,0, 1). Найти  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ . 23. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $3x - 2y + z = xz + 5$  определяет неявную функцию  $z = \varphi(x, y)$  по крайней мере в окрестности точки (2, 1,-1). Найти  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ . 24. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $e^z + x + 2y + z = 4$  определяет неявную функцию  $z = \varphi(x, y)$  по крайней мере в окрестности точки (1, 1, 0). Найти  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ . 25. На основании теоремы существования неявной функции показать, что уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 - z - 4 = 0$  определяет неявную функцию  $z = \varphi(x, y)$  по крайней мере в окрестности точки (1, 1,-1). Найти  $\partial z / \partial x, \partial z / \partial y$ . 26. Для функции  $z = x^2 + xy - 2y^2$  найти наибольшее и наименьшее значения на множестве, определяемом неравенствами:  $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2\}$ .

Задачи по теме «Непрерывность функции. Точки разрыва».

Исследовать функции на непрерывность и построить график в окрестности каждой точки разрыва, предварительно определив её тип: 1)  $y = x^2 - 4x + 3$ ; 2)  $y = x^2 - 16x - 4$ ; 3)  $y = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$  4)  $y = \arctg 2x/x^2 - 2$ ; 5)  $y = \arctg 1/x/x^4 - 4$ ; 6)  $y = \sin x/x$ ; 7)  $y = x - 3(x-4)^2$ ; 8)  $y = \begin{cases} 1/x, & x \leq -1; \\ x+1, & x > -1. \end{cases}$  9)  $y = \begin{cases} x+1, & x < -2; \\ 1, & x = -2; \\ x^2 - 5, & x > -2. \end{cases}$  10)  $y = x^3 - 8x^2 - 2$ ; 11)  $y = 1/5 \cdot 1/x^3 + 2$ ; 12)  $y = x - 1/x^2 - x - 12$ ; 13)  $y = \arctg 3 + 2x/x^4 - 4$ ; 14)  $y = x^2 + 4x^2 - 2$ ; 15)  $y = \begin{cases} x/x - 1, & x < 1; \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$  16)  $y = (x+1)^2/x^2 - 3x - 4$ ; 17)  $y = 1/x^2 - 10x + 16$ ; 18)  $y = \begin{cases} x^3, & x \leq -1; \\ x^2 + 1, & x > -1. \end{cases}$  19)  $y = 1/(1 + e^{1/x - 1})$ ; 20)  $y = -4(x-4)^2$ ; 21)  $y = x/x^2 + 4$ ; 22)  $y = \begin{cases} \cos x, & -\pi \leq x < 0, \\ x^2 + 1, & x \geq 0. \end{cases}$  23)  $y = 4x^2 - 1$ ; 24)  $y = x - 4x^2 - 16$ ; 25)  $y = x(x+1)^2$ ; 26)  $y = x^2 - 1/x^3 - 3x + 2$ ; 27)  $y = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ 2x - 1, & x > 0. \end{cases}$  28)  $y = 1/x - 1/x + 1/x - 1/x - 1/x$ ; 29)  $y = e^{x+1/x}$ ; 30)  $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2, & x > 2 \end{cases}$

ЗАДАНИЯ 1. Найти интеграл  $\int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x \, dx$ ;  $\int x^2 \cos 2x \, dx$ . Найти интеграл  $\int x \cdot x \, dx$ ;  $\int x^2 \sin 3x \, dx$ . 3. Вычислить интеграл  $\int_0^1 x \arctg x \, dx$ .

4. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $y = x^2 + 1$  и его асимптотой. 5. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли  $r = a \cos^2 \varphi$ . 6. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D y \, dx \, dy$ , где  $D$  - область, ограниченная линиями  $x = y^2$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ). 7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 4$ . 8. Нарисовать интегральные кривые дифференциального уравнения  $u' = 2$ . Отметить особое решение. 9. Решить дифференциальное уравнение  $x \, dy - y \, dx = y^2 \, x$ . 10. Решить дифференциальное уравнение  $y \operatorname{tg} x \cdot y' + \dots = -\cos$ . 11. Решить дифференциальное уравнение  $y \operatorname{tg} x^2 = \dots$ . 12. Решить задачу Коши  $y'' + y' + y = 6 \cdot 9 \cdot 10 \sin$ ,  $(0) 0$ . 13. Исследовать сходимость числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ . 14. Найти область сходимости ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \dots$ . 15. Дана периодическая функция периода  $2\pi$ :  $f(x) = \dots$  если  $x \in [\dots]$ . Разложить ее на всей числовой оси в ряд Фурье. Начертить график суммы ряда Фурье. 16. Исследовать функцию  $f(x, y) = \dots$  на экстремум. 17. Найти градиент поля  $U(x, y, z) = \dots$  в точке  $M(1; 2; 2)$ . 18. Найти поток радиуса-вектора через поверхность куба  $-a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a, -a \leq z \leq a$  изнутри этой поверхности. 19. Найти дивергенцию поля  $F(x, y, z) = \dots$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

20. Найти поток вихря поля  $\vec{F} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$  через боковую поверхность части конуса  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 3$ , в направлении оси Oz

### Контрольные задания:

1. Вычислить предел  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x$
2. Исследовать на непрерывность функцию  $y = e^{\frac{1}{x-1}}$
3. Вычислить производную  $y = x^2 e^{x^3} \sin 5x$
4. Найти градиент и его величину в точке  $M(e; 1)$  для функции  $y = \ln(xy^2)$
5. Вычислить  $\frac{\partial z}{\partial u}$ , если  $z = \ln \frac{x}{y}; \begin{cases} x = u + 3v \\ y = u * v^2 \end{cases}$
6. Найти локальный экстремум  $z = 2y^3 + x^2y + 5y^2 + x^2 - 1$
7. Найти условный экстремум  $\begin{cases} z = x + y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \end{cases}$
8. Найти приближенное значение функции  $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$

### Контрольные задания:

1. Вычислить интеграл :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$$

2. Вычислить интеграл

$$\int x \ln(1-x) dx$$

3. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-3)(x+4)}$$

4. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}$$

5. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\pi} (x-1) \cos x dx$$

6. Вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2} dx$

7. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

8. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

9. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^n}$

10. Поменять порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$

11. Вычислить двойной интеграл  $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$

12. Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ , где D- четверть круга  $x^2 + y^2 \leq$

1.

Критерии оценивания. «отлично» – студент правильно выполнил задание. Показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на все дополнительные вопросы; «хорошо» – студент выполнил задание с небольшими неточностями. Показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. Ответил на большинство дополнительных вопросов; «удовлетворительно» – студент выполнил задание с существенными неточностями. Показал удовлетворительное владение навыками применения полученных знаний и умений при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. При

ответах на дополнительные вопросы было допущено много неточностей; «неудовлетворительно» – при выполнении задания студент продемонстрировал недостаточный уровень владения умениями и навыками при решении задач в рамках усвоенного учебного материала. При ответах на дополнительные вопросы было допущено множество неточностей

### **Контрольная точка - в форме Контрольной работы (письменная).**

#### **Контрольная работа.**

1. Множество действительных чисел. Свойства. Ограниченные множества. Точные верхняя и нижняя грани.

2. Функции, способы задания. Область определения, область значений функции.

Основные элементарные функции.

3. Числовые последовательности. Предел последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Достаточный признак существования предела для монотонной последовательности

4. Предел функции в точке, на бесконечности. Эквивалентность определений сходимости по Коши и по Гейне. Односторонние пределы.

5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.

6. Теоремы о пределах функций.

7. Сравнение бесконечно малых величин.

8. Первый замечательный предел, следствия.

9. Второй замечательный предел, следствия.

10. Вычисление пределов с применением эквивалентных бесконечно малых величин.

11. Непрерывность функции в точке, свойства функций, непрерывных в точке.

Непрерывность функций на промежутке. Непрерывность элементарных функций.

12. Точки разрыва функции, их классификация.

13. Непрерывные функции на замкнутом отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции и о достижении непрерывной функцией точной верхней и нижней грани.

14. Теоремы Больцано - Вейерштрасса об обращении непрерывной на отрезке функции в нуль и о промежуточном значении непрерывной функции.

II. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

15. Задачи, приводящие к понятию производных. Определение производной, ее геометрический и механический смысл. Уравнения касательной и нормали к графику функции. Односторонние и бесконечные производные. Необходимое условие существования производной.

16. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.

17. Правила дифференцирования функций. Производная сложной функции.

18. Дифференцирование неявных функций и функций, заданных параметрически.

Логарифмическое дифференцирование.

19. Дифференциал функции, его геометрический смысл и свойства. Инвариантность формы дифференциала.

20. Теорема Ферма о дифференцируемых функциях, ее геометрический смысл.

Контрпримеры

Теорема Ролля о дифференцируемых функциях, ее геометрический смысл.

Контрпримеры.

22. Теорема Лагранжа о дифференцируемых функциях, ее геометрический смысл.

23. Теорема Коши о дифференцируемых функциях, ее геометрический смысл.

24. Производные и дифференциалы высших порядков.

25. Вычисление пределов функций с применением правила Лопиталя.

26. Формулы Тейлора и Маклорена. Вычисление пределов функций с помощью формулы Тейлора.

27. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.

28. Экстремум функции. Необходимое условие экстремума. Критические точки по первой производной. Достаточные условия экстремума. Достаточные условия экстремума функции с

использованием производных высших порядков. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

29. Необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости) функции.

30. Точки перегиба. Необходимое условие существования точки перегиба. Критические точки по второй производной. Достаточные условия точки перегиба. Достаточные условия существования точки перегиба функции с использованием производных высших порядков.

31. Горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты графика функции, их отыскание.

32. Общая схема исследования характера поведения функции и построение графика с применением производной.

III. Интегральное исчисление функций одной переменной

33. Первообразная заданной функции и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла.

34. Таблица интегралов от основных элементарных функций. Независимость вида неопределённого интеграла от выбора аргумента.

35. Основные методы интегрирования.

36. Замена переменной интегрирования в неопределённом интеграле.

37. Формула интегрирования по частям, примеры её применения.

38. Интегрирование рациональных дробей.

39. Интегрирование простейших иррациональностей.

40. Интегрирование тригонометрических функций.

41. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла. Определение определённого интеграла.

42. Свойства определённого интеграла.

43. Определённый интеграл с переменным верхним пределом.

44. Теорема Ньютона-Лейбница.

45. Замена переменной интегрирования в определённом интеграле. Примеры.

46. Интегрирование по частям определённого интеграла. Примеры.

47. Приложения определённого интеграла к некоторым задачам геометрии и механики.

48. Площадь в прямоугольных и полярных координатах.

49. Длина дуги в прямоугольных и полярных координатах.

50. Вычисление объёмов тел по известным поперечным сечениям. Объём тела вращения.

51. Площадь поверхности вращения.

52. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода, определение и свойства. Достаточные условия сходимости.

IV. Числовые и функциональные ряды

53. Сходимость и расходимость числовых рядов. Необходимый признак сходимости ряда.

54. Ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами.

55. Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. Признаки сравнения. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак.

56. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.

57. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость рядов.

58. Сходимость и равномерная сходимость функциональных последовательностей.

59. Сходимость, абсолютная сходимость и область сходимости функционального ряда.

60. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся рядов.

61. Степенные ряды. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов.

62. Ряд Тейлора. Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена.

63. \* Нормированные линейные пространства. Метрические пространства. Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства.

64. \* Функциональное пространство  $(, ) L_2$  а б. Ортогональные системы функций в  $(, ) L_2$  а б. Процесс ортогонализации Шмидта.

65. \* Ряды Фурье в гильбертовом пространстве  $(\cdot, \cdot)_{L_2}$  а б. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.
66. Тригонометрические ряды Фурье. Теорема Дирихле о разложимости функции в ряд Фурье.
67. Ряды Фурье четных и нечетных функций.
68. Понятие о рядах Фурье непериодических функций на конечном промежутке.
- V. Функции нескольких переменных
69. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.
70. Частные производные. Дифференцируемые функции нескольких переменных. Дифференциал функции нескольких переменных.
71. Производная сложной функции. Производная неявной функции.
72. Понятие о производной функции по данному направлению. Градиент.
73. Частные производные высших порядков.
74. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
75. Экстремум функции нескольких переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции в области. Понятие условного экстремума.
- VI. Дифференциальные уравнения.
76. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной. Формулировка теоремы существования и единственности. Геометрическое содержание теоремы, геометрический смысл уравнения, связь между ними. Частное, общее, особое решения.
77. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Метод разделения переменных.
78. Однородные дифференциальные уравнения. Уравнения, приводимые к однородным.
79. Линейные уравнения. Методы интегрирования линейных уравнений.
80. Уравнение Бернулли. Сведение к линейному уравнению.
81. Уравнения в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие уравнения в полных дифференциалах.
82. Интегрирующий множитель, способ нахождения.
83. Дифференциальные уравнения высших порядков. Формулировка теоремы существования и единственности. Частное, общее, особое решения. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
84. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка.
85. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Свойства линейного дифференциального оператора и свойства решений. Линейная зависимость функций на интервале. Определитель Вронского. Фундаментальная система решений. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.
86. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.
87. Метод вариации произвольной постоянной для линейного неоднородного дифференциального уравнения.
88. Линейные однородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами.
89. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.
90. Понятие о системах дифференциальных уравнений.
- VII. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.
- Элементы теории поля.
91. Понятие двойного интеграла. Геометрический и физический смысл двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.
92. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

93. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.

94. Понятие тройного интеграла. Геометрический и физический смысл тройного интеграла. Свойства. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных декартовых координатах.

95. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

96. Приложения тройного интеграла.

Критерии оценивания:

Обозначение проблемы и обоснование её актуальности; краткий анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему; логичное изложение собственной позиции, полное раскрытие темы; соблюдение требований к объёму, формулировка выводов:

0 – 1 ошибка – 5 баллов

2 – 4 ошибки - 4 балла

5 - 8 ошибок - 3 балла

Более 8 ошибок – работа не зачтена.

### 5.3 ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АТТЕСТАЦИЯ

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы 1,2 семестр

#### Итоговый тест (с ответами) для проверки сформированности компетенций

ОПК-1. Способен использовать знания и методы экономической науки, применять статистико-математический инструментарий, строить экономико-математические модели, необходимые для решения профессиональных задач, анализировать и интерпретировать полученные результаты.

**1. Прочитайте текст и выберите правильный ответ** Первые математические модели были созданы:

A. Ф. Кенэ

B. К. Марксом

C. Г. Фельдманом

D. Д. Нейманом

**Правильный ответ: A**

**2. Прочитайте текст и выберите правильный ответ** Какой из структурных элементов включает в себя процесс моделирования?

A. анализ

B. модель

C. объект

D. Субъект

**Правильный ответ: A**

**3. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Если предпосылки метода наименьших квадратов нарушены, то ...

а) полученное уравнение статистически незначимо

б) коэффициент регрессии является несущественным

в) оценки параметров могут не обладать свойствами эффективности, состоятельности и несмещенности

**Правильный ответ: в**

**4. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Указать лишнее: Для разложения функции  $y = \sin x^2$  использовался :

1) степенной ряд

2) ряд Тейлора

3) ряд Маклорена

4) числовой ряд;

**Правильный ответ 4**

**5. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Укажите условие, являющееся необходимым для разложения функции в ряд Маклорена

- 1) периодичность
- 2) непрерывность
- 3) бесконечно-дифференцируемая
- 4) все перечисленные условия

**Правильный ответ 3**

**6. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Указать, какое из отображений не является функцией

- 1)  $y = x^2$  ;
- 2)  $y = e^x$  ;
- 3)  $y = \pm\sqrt{x}$  ;
- 4)  $y = \sin x$

**Правильный ответ 3**

**7. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Указать функцию, эквивалентную на бесконечности функции

- 1)  $x^3$
- 2)  $\sqrt{x}$
- 3)  $-4\sqrt{x}$
- 4) 0

**Правильный ответ 1**

**8. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Указать функцию, эквивалентную в точке  $x = 0$  функции

- 1)  $x^3$
- 2)  $\sqrt{x}$
- 3)  $-4\sqrt{x}$
- 4) 0

**Правильный ответ 3**

**9. Прочитайте текст и выберите правильный ответ.** Указать количество функций, уходящих в суперпозиции функций

- 1) 4 ;
- 2) 3 ;
- 3) 5 ;
- 4) 2.

**Правильный ответ 1**

1

- 1)  $\sin u \sim u$  ;
- 2)  $\cos u \sim u$  ;
- 3)  $\operatorname{tg} u \sim u$  ;
- 4)  $\operatorname{arctg} u \sim u$

**Правильный ответ 2**

**11. Установите соответствие между терминами и определениями**

- 1) коэффициент парной корреляции  $r_{xy}$
- 2) коэффициент детерминации  $R^2$
- 3) F – критерий Фишера

Варианты ответов:

- а) оценивает статистическую значимость уравнения регрессии в целом;
- б) характеризует тесноту линейной связи между признаками и находится в границах: -1, 1;
- с) характеризует долю дисперсии, объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака у

**Правильный ответ: 1) - б2) - с3) – а**

**12. Установите соответствие между функциями и характеристиками этих функций.**

| ФУНКЦИИ | ХАРАКТЕРИСТИКИ          |
|---------|-------------------------|
| г       | 1) функция возрастающая |
| е       |                         |
| к       |                         |

|                       |                                  |
|-----------------------|----------------------------------|
| А) $y = 5x - 1$       | 2) функция имеет точку минимума  |
| Б) $y = 10x - x^2$    | 3) функция убывающая             |
| В) $y = x^2 - 4x + 7$ | 4) функция имеет точку максимума |
| Г) $y = 6 - x$        |                                  |

**Решение.**

А) Это линейная функция с положительным угловым коэффициентом  $k=5$ , значит, функция возрастающая, не имеющая точек минимума или максимума. Подходит характеристика под номером 1.

Б) Данная функция – это парабола с коэффициентом  $a = -1 < 0$  (множитель перед  $x^2$ ), значит, ветви параболы направлены вниз. Эта функция будет иметь одну точку максимума. Имеем характеристику под номером 4.

В) Также парабола, ветви направлены вверх ( $a=1$ ) с одной точкой минимума. Характеристика под номером 2.

Г) Линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом  $k=-1$ , следовательно, она убывающая. Характеристика под номером 3.

**Правильный ответ 1423.**

13. **Установите соответствие:** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Вычислить определитель матрицы  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ .

1) 2                      2) -2                      3) 10                      4) 16

**Правильный ответ 4**

14. **Установите соответствие:** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Решить неравенство  $\begin{vmatrix} x & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} < 0$

1)  $x \leq 3$                       2)  $x = 3$                       3)  $x < -3$                       4)  $x > -3$

**Правильный ответ 4**

15. **Установите соответствие:** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов:

Задача: Вычислить определитель :  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1) 3                      2) 12                      3) 10                      4) -12

**Правильный ответ 3**

16. **Закончите фразу.** Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже. Вставьте недостающее. Ответ следует записать в виде словосочетания с большой буквы, в именительном падеже \_\_\_\_\_ – система математических соотношений, которая приближённо, в абстрактной форме описывает изучаемый процесс или систему.

**Правильный ответ:** Математическая модель

17. **Закончите фразу.** Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже. Уравнение, в котором объясняемая переменная представляется в виде функции от объясняющих переменных (например, модель спроса на некоторый товар в зависимости от его цены и дохода покупателей), называется...

**Правильный ответ:** регрессионной моделью (или регрессивная модель) ответ студента может быть представлен в близкой интерпретации, эквивалентной приведенному правильному ответу

18. **Закончите фразу.** Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже: График зависимости автокорреляционной функции временного ряда от величины лага называется ...

**Правильный ответ:** коррелограмма

**19. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже:** Переменные, являющиеся атрибутивными признаками (например, профессия, пол, образование), которым придали цифровые метки называются ...

**Правильный ответ:** фиктивные

**20. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже.** ... Прочитайте текст и запишите правильный ответ. Ответ запишите в виде числа. В аддитивной модели сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна ....

**Правильный ответ:** 0

**21. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже.** Вставьте недостающее. Ответ следует записать с большой буквы, в именительном падеже  
\_\_\_\_\_ — математический метод, применяемый для решения различных задач, основанный на минимизации суммы квадратов отклонений некоторых функций от искомым переменных.

**Правильный ответ:** Метод наименьших квадратов

**22. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже.:**

Вопрос: Градиент функции – это:

**Правильный ответ:** вектор

**23. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже.:** Вопрос: Для функции двух переменных условие положительного гессиниана является:

**Правильный ответ** достаточный

**24. Укажите правильную последовательность** этапов вычисления обратной матрицы. Дана квадратная матрица  $A$ , определитель которой не равен нулю. а) нахождение алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы и составление союзной матрицы; б) вычисление определителя исходной матрицы; в) нахождение транспонированной матрицы к данной; г) вычисление обратной матрицы по формуле

**Правильный ответ:** б)-в)-а)-г)

**25. Укажите правильное соответствие** между типом матричного уравнения и формулой для его решения:

1.  $AX = B$
2.  $XA = B$
3.  $AXB = C$

Варианты ответов

- а)  $X = A^{-1}CB^{-1}$
- б)  $X = BA^{-1}$
- в)  $X = A^{-1}B$

**Правильный ответ:** 1) - в 2) - б 3) - а

**26. Установите соответствие.** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Выполнить действие  $A \cdot B$ , где  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- 1)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       2)  $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 14 & 34 \end{pmatrix}$       3)  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$       4)  $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$

**Правильный ответ:** 2

**27. Установите соответствие.** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Выполнить действие  $-3A$ , где  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

- 1)  $\begin{pmatrix} -13 & -23 \\ -33 & -43 \end{pmatrix}$       2)  $\begin{pmatrix} -31 & -32 \\ -33 & -34 \end{pmatrix}$       3)  $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$       4)  $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$

**Правильный ответ** 4

**28. Установите соответствие.** Соотнести решение задачи с одним из вариантов ответов

Задача: Выполнить действие  $AE + 3EA$ , где  $E$  – единичная матрица, а  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1)  $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$     2)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$     3)  $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$     4)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

**Правильный ответ 3**

**29. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже.:**

Укажите тип ряда Тейлора:

**Правильный ответ** степенной ряд

**30. Закончите фразу. Ответ следует записать с маленькой буквы, в именительном падеже...:**

Укажите тип ряда Фурье:

**Правильный ответ:** функциональный ряд

Инструкция по выполнению. При ответе на вопросы:

Выбрать один правильный ответ. Дополнить фразу, сопоставить, установить последовательность

Вопросы для самостоятельной подготовки к экзамену и зачету

**Вопросы к зачету с оценкой:**

Функция. Основные определения. Классификация.

Предел функции.

Последовательность. Предел числовой последовательности.

Бесконечно-малые. Теоремы о бесконечно-малых.

Односторонние пределы.

Теоремы о пределах.

«Замечательные» пределы и следствия к ним.

Эквивалентные бесконечно-малые.

Теоремы об эквивалентных бесконечно-малых.

Непрерывность функции.

Разрывы функции.

Свойства функций непрерывных на отрезке.

Производная. Основные определения. Геометрический и механический смысл.

Производная. Основные определения. Экономический смысл.

Производная обратной функции.

Производная показательной-степенной функции.

Дифференциал функции. Его геометрический смысл.

Применение дифференциала к приближенному вычислению значения функции.

Производные и дифференциалы высших порядков.

Производная параметрически заданной функции.

Экстремум функции. Основные теоремы дифференциального исчисления функции одной переменной.

Формула Тейлора.

Монотонность функции. Необходимое и достаточные условия экстремума.

Выпуклость-вогнутость функции. Точки перегиба.

Асимптоты графика функции.

Схема исследования функции.

Функции нескольких переменных (ФНП). Основные определения.

ФНП. Предел и непрерывность.

ФНП. Свойства непрерывных функций.

ФНП. Виды разрывов.

ФНП. Линии уровня. Геометрический смысл функции двух переменных.

ФНП. Частные и полное приращения.

ФНП. Частные производные.

ФНП. Частные производные высших порядков.

ФНП. Теорема о порядке дифференцирования смешанных производных.

ФНП. Частные и полный дифференциалы.  
ФНП. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.  
Градиент.  
Производная по направлению.  
Экстремум функции двух переменных. Основные определения.  
Достаточное условие экстремума функции двух переменных.  
Необходимое условие экстремума функции двух переменных.  
Условный экстремум.  
Дифференцирование сложной функции.

**Вопросы, выносимые на экзамен:**

1. Первообразная и ее свойства.
2. Неопределенный интеграл, его свойства и геометрический смысл.
3. Свойства неопределенного интеграла.
4. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: непосредственное интегрирование и заведение под знак дифференциала.
5. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: замена переменной.
6. Методы интегрирования в неопределенном интеграле: интегрирование по частям.
7. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.
8. Метод разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
9. Интегрирование простейших рациональных дробей.
10. Интегрирование некоторых иррациональных функций и тригонометрические подстановки.
11. Интегрирование тригонометрических функций.
12. Интегрирование дифференциального бинома.
13. Определенный интеграл. Основные определения.
14. Свойства определенного интеграла.
15. Геометрический смысл определенного интеграла.
16. Условия существования определенного интеграла.
17. Методы интегрирования в определенном интеграле: замена переменной.
18. Методы интегрирования в определенном интеграле : интегрирование по частям.
19. Несобственный интеграл 1-го рода с бесконечными пределами.
20. Несобственный интеграл 2-го рода с бесконечными разрывами.
21. Интегралы по области. Примеры интегралов по области.
22. Свойства интегралов по области.
23. Двойной интеграл. Определение. Геометрический смысл.
24. Вычисление двойного интеграла в декартовой системе координат.
25. Криволинейные координаты. Якобиан.
26. Замена переменной в двойном интеграле. Якобиан в полярной системе координат.
27. Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.
28. Тройной интеграл. Определение. Геометрический смысл.
29. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.
30. Элемент пространственной области в криволинейных координатах.
31. Замена переменной в тройном интеграле.
32. Числовые ряды. Основные определения.
33. Свойства сходящихся числовых рядов.
34. Необходимый признак сходимости числового ряда.
35. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
36. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница.
37. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости.
38. Функциональные ряды. Основные определения.
39. Теорема Абеля.
40. Область сходимости степенного ряда.
41. Радиус сходимости степенного ряда.

42. Свойства степенных рядов.
43. Ряды Тейлора и Маклорена. Основные определения.
44. Теорема о разложении функции в ряд Тейлора.
45. Разложение основных функций в степенные ряды.
46. Вычисление степенных рядов с заданной погрешностью.
47. Применение степенных рядов к приближенному вычислению значения функции.
48. Применение степенных рядов к приближенному вычислению интеграла.

## **6. МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПРОЦЕДУРЫ ОЦЕНИВАНИЯ**

Комплект оценочных средств хранится на кафедре, подлежит обновлению по мере необходимости. Для промежуточной аттестации в виде экзамена каждое ОС по дисциплине обновляется и утверждается за 14 дней до начала сессионного периода и хранится в недоступном месте от несанкционированного доступа. Ответственность несет кафедра.

Порядок проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по ОПОП регламентируются Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по программам высшего образования.

Текущий контроль успеваемости является формой контроля качества знаний обучающихся, осуществляемого в межсессионный период обучения с целью определения качества освоения ОПОП. Текущий контроль успеваемости осуществляется: на лекциях, практических (семинарских) занятиях, в рамках контроля самостоятельной работы.

Обучающиеся заранее информируются о критериях и процедуре текущего контроля успеваемости преподавателями по соответствующей учебной дисциплине (модуля).

Успеваемость при текущем контроле характеризует объем и качество выполненной обучающимся работы по дисциплине (модулю).

Педагогические виды и формы, используемые в процессе текущего контроля успеваемости обучающихся, определяются методической комиссией кафедры. Выбираемый вид текущего контроля обеспечивает наиболее полный и объективный контроль (измерение и фиксирование) уровня освоения результатов обучения по дисциплине.

Преподаватели предоставляют сведения о текущей успеваемости обучающихся в рамках проведения текущей аттестации в семестре в деканаты/ учебный отдел института в сроки, определенные внутренними распорядительными документами института.

В целях обеспечения текущего контроля успеваемости преподаватель проводит консультации. Преподаватель, ведущий занятия семинарского типа, проводит аттестацию обучающихся за прошедший период. Аттестация проводится, если проведено не менее 3 практических (семинарских) или лабораторных занятий, в установленные деканатом сроки, не реже 1 раза за учебный семестр. Обучающиеся аттестуются путем выставления в соответствующую групповую ведомость записей по системе: «аттестован» или «не аттестован».

Преподаватель, проставляя итоги текущей аттестации, доводит результаты аттестации до сведения студенческой группы и объясняет причины отрицательной аттестации по запросу обучающегося.

При аттестации обучающихся учитываются следующие факторы:

- результаты работы на занятиях, показанные при этом знания по дисциплине (модулю), усвоение навыков практического применения теоретических знаний, степень активности на практических (семинарских) занятиях;
- результаты и активность участия в семинарах и коллоквиумах;
- результаты выполнения контрольных работ;
- результаты и объем выполненных заданий в рамках самостоятельной работы обучающихся;
- результаты личных бесед со студентами по материалу учебной дисциплины (модуля);
- посещение студентами, семинарских и практических занятий, лабораторных работ;
- своевременная ликвидация задолженностей по пройденному материалу, возникших

вследствие пропуска занятий либо неудовлетворительных оценок по результатам работы на занятиях.

– результаты прохождения контрольных точек по дисциплине.

**Промежуточная аттестация** обучающихся института является формой контроля результатов обучения по дисциплине с целью комплексного определения соответствия уровня и качества знаний, умений и навыков обучающихся требованиям, установленным образовательной программой. Формирование оценки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины осуществляется с использованием пятибалльной системы оценки знаний обучающихся. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций. Процедуры оценивания включают в себя текущий контроль и промежуточную аттестацию.

Текущий контроль успеваемости проводится с использованием оценочных средств, представленных в п. 5 данного приложения. Результаты текущего контроля доводятся до сведения студентов до промежуточной аттестации. Промежуточная аттестация проводится в форме экзамена и зачета с оценкой. Экзамен проводится по расписанию экзаменационной сессии в письменном виде. Количество вопросов в экзаменационном задании – 30. Проверка ответов и объявление результатов производится в день экзамена. Результаты аттестации заносятся в экзаменационную ведомость и зачетную книжку студента. Студенты, не прошедшие промежуточную аттестацию по графику сессии, должны ликвидировать задолженность в установленном порядке.

## 7. ОСОБЕННОСТИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ

Адаптированные оценочные материалы содержатся в адаптированной ОПОП. Обучение обучающихся с ограниченными возможностями здоровья при необходимости осуществляется на основе адаптированной рабочей программы с использованием специальных методов обучения и дидактических материалов, составленных с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся (обучающегося).

Самостоятельная работа обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов позволяет своевременно выявить затруднения и отставание и внести коррективы в учебную деятельность. Конкретные формы и виды самостоятельной работы обучающихся лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов устанавливаются преподавателем. Выбор форм и видов самостоятельной работы, обучающихся с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов осуществляется с учетом их способностей, особенностей восприятия и готовности к освоению учебного материала. Формы самостоятельной работы устанавливаются с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге или на компьютере, в форме тестирования, электронных тренажеров и т.п.).

Основные формы представления оценочных средств – в печатной форме или в форме электронного документа. Для обучающихся с нарушениями зрения предусматривается возможность проведения текущего и промежуточного контроля в устной форме. Для обучающихся с нарушениями слуха предусматривается возможность проведения текущего и промежуточного контроля в письменной форме.

Таблица 7.1. Категории обучающихся с ОВЗ, способы восприятия ими информации и методы их обучения.

| Категории обучающихся по нозологиям |                                                                              | Методы обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| с нарушениями зрения                | Слепые. Способ восприятия информации: осязательно- слуховой                  | Аудиально-кинестетические, предусматривающие поступление учебной информации посредством слуха и осязания. Могут использоваться при условии, что визуальная информация будет адаптирована для лиц с нарушениями зрения;                                                                                                                                                                |
|                                     | Слабовидящие. Способ восприятия информации: зрительно- осязательно- слуховой | визуально-кинестетические, предполагающие передачу и восприятие учебной информации при помощи зрения и осязания; аудио-визуальные, основанные на представлении учебной информации, при которых задействовано зрительное и слуховое восприятие; аудио-визуально-кинестетические, базирующиеся на представлении информации, которая поступает по зрительному, слуховому и осязательному |

|                                               |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                               |                                                                                                                                                          | каналам восприятие.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| С нарушениями и слуха                         | <p>Глухие. Способ восприятия информации: зрительно-осознательный</p> <p>Слабослышащие. Способ восприятия информации: Зрительно-осознательно-слуховой</p> | <p>визуально-кинестетические, предполагающие передачу и восприятие учебной информации при помощи зрения и осязания. Могут использоваться при условии, что аудиальная информация будет адаптирована для лиц с нарушениями слуха: аудио-визуальные, основанные на представлении учебной информации, при которых задействовано зрительное и слуховое восприятие;</p> <p>аудиально-кинестетические, предусматривающие поступление учебной информации посредством слуха и осязания;</p> <p>аудио-визуально-кинестетические, базирующиеся на представлении информации, которая поступает по зрительному, слуховому и осязательному каналам восприятия.</p> |
| С нарушениями и опорно-двигательного аппарата | Способ восприятия информации: зрительно-осознательно-слуховой                                                                                            | <p>— визуально-кинестетические;</p> <p>— аудио-визуальные;</p> <p>— аудио-кинестетические;</p> <p>— аудио-визуально-кинестетические.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |

Таблица 7.2. – Способы адаптации образовательных ресурсов.

Условные обозначения: «+» — образовательный ресурс, не требующий адаптации;

«АФ» — адаптированный формат к особенностям приема-передачи информации обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ формат образовательного ресурса, в том числе с использованием специальных технических средств; «АЭ» — альтернативный эквивалент используемого ресурса

| Категории обучающихся по нозологиям         |               | Образовательные ресурсы |                                                                             |                                                |                                                 |                                                                                   |
|---------------------------------------------|---------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|                                             |               | Электронные             |                                                                             |                                                |                                                 | Печатные                                                                          |
|                                             |               | мультимедиа             | графические                                                                 | аудио                                          | текстовые, электронные аналоги печатных изданий |                                                                                   |
| С нарушениями зрения                        | Слепые        | АФ                      | АЭ (например, создание материальной модели графического объекта (3Dмодели)) | +                                              | АЭ (например, аудио описание)                   | АЭ (например, печатный материал, выполненный рельефно-точечным шрифтом Л. Брайля) |
|                                             | Слабовидящие  | АФ                      | АФ                                                                          | +                                              | АФ                                              | АФ                                                                                |
| С нарушениями слуха                         | Глухие        | АФ                      | +                                                                           | АЭ (например, текстовое описание, гиперссылки) | +                                               | +                                                                                 |
|                                             | Слабослышащие | АФ                      | +                                                                           | АФ                                             | +                                               | +                                                                                 |
| С нарушениями опорно-двигательного аппарата |               | +                       | +                                                                           | +                                              | +                                               | +                                                                                 |

Таблица 7.3. - Формы контроля и оценки результатов обучения инвалидов и лиц с ОВЗ

| Категории обучающихся по нозологиям | Форма контроля и оценки результатов обучения                                                    |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| С нарушениями зрения                | — устная проверка: дискуссии, тренинги, круглые столы, собеседования, устные коллоквиумы и др.; |
|                                     | — с использованием компьютера и специального ПО: работа с электронными                          |

|                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                             | образовательными ресурсами, тестирование, рефераты, курсовые проекты, дистанционные формы, если позволяет острота зрения -графические работы и др.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| С нарушениями слуха                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>– письменная проверка: контрольные, графические работы, тестирование, домашние задания, эссе, письменные коллоквиумы, отчеты и др.;</li> <li>– с использованием компьютера и специального ПО: работа с электронными образовательными ресурсами, тестирование, рефераты, курсовые проекты, графические работы, дистанционные формы и др.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| С нарушениями опорно-двигательного аппарата | <ul style="list-style-type: none"> <li>– письменная проверка, с использованием специальных технических средств (альтернативных средства ввода, управления компьютером и др.): контрольные, графические работы, тестирование, домашние задания, эссе, письменные коллоквиумы, отчеты и др.;</li> <li>– устная проверка, с использованием специальных технических средств (средств коммуникаций): дискуссии, тренинги, круглые столы, собеседования, устные коллоквиумы и др.;</li> <li>– с использованием компьютера и специального ПО (альтернативных средств ввода и управления компьютером и др.): работа с электронными образовательными ресурсами, тестирование, рефераты, курсовые проекты, Графические работы, дистанционные формы - предпочтительнее обучающимся, ограниченным в передвижении и др.</li> </ul> |

### **7.1. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ**

Текущий контроль и промежуточная аттестация обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ осуществляется с использованием оценочных средств, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации, в том числе с использованием специальных технических средств.

Текущий контроль успеваемости для обучающихся инвалидов и лиц с ОВЗ направлен на своевременное выявление затруднений и отставания в обучении и внесения коррективов в учебную деятельность. Возможно осуществление входного контроля для определения его способностей, особенностей восприятия и готовности к освоению учебного материала.

### **7.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ДЛЯ ИНВАЛИДОВ И ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ**

Форма промежуточной аттестации устанавливается с учетом индивидуальных психофизических особенностей (устно, письменно на бумаге, письменно на компьютере, в форме тестирования и т.п.). При необходимости обучающимся предоставляется дополнительное время для подготовки ответа. Промежуточная аттестация, при необходимости, может проводиться в несколько этапов. Для этого рекомендуется использовать рубежный контроль, который является контрольной точкой по завершению изучения раздела или темы дисциплины, междисциплинарного курса, практик и ее разделов с целью оценивания уровня освоения программного материала. Формы и срок проведения рубежного контроля определяются